EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta …*.061**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul vectorului $2\vec{i}+5\vec{j}$.

(4p) **b)** Să se calculeze lungimea segmentului $[AC]$, unde $A(6,7)$ și $C(7,6)$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}$.

(4p) **d)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(6,7)$ și $C(7,6)$ să fie pe dreapta de ecuație $x+ay+b=0$.

(2p) **e)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(6,7)$, $B(5,5)$ și $C(7,6)$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $\frac{3+i}{4-i}=a+bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze elementul $\hat{3}^{2007}$ în $\mathbf{Z}_7$.

(3p) **b)** Să se calculeze expresia $E=C_9^4-C_9^5$.

(3p) **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x^4-3x^2+2=0$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x+8^x=10$.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $n\in\{1,2,3,4,5\}$ să verifice relația $3^n>n^3$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^5+2x-1$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

(3p) **d)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n}+5}{2n+7}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră inelele $(\mathbf{Z}_{24}, +, \cdot)$ şi $(\mathbf{Z}_{24}[X], +, \cdot)$. Un element a dintr-un inel $(A, +, \cdot)$ se numeşte *nilpotent* dacă există $n \in \mathbf{N}^*$, astfel încât $a^n = 0$.

(4p) **a)** Să se arate că $\hat{6}$ este *nilpotent* în inelul $(\mathbf{Z}_{24}, +, \cdot)$, iar $\hat{2}$ nu este *nilpotent* în inelul $(\mathbf{Z}_{24}, +, \cdot)$

(4p) **b)** Să se arate că $f = \hat{6}X + \hat{12}$ este *nilpotent* în inelul $(\mathbf{Z}_{24}[X], +, \cdot)$, iar $g = X + \hat{1}$ nu este *nilpotent* în $(\mathbf{Z}_{24}[X], +, \cdot)$

(4p) **c)** Să se demonstreze că $\hat{a} \in \mathbf{Z}_{24}$ este *nilpotent* dacă şi numai dacă 6 divide a.

(2p) **d)** Să se determine numărul elementelor *nilpotente* din inelul $(\mathbf{Z}_{24}, +, \cdot)$.

(2p) **e)** Să se arate că dacă $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbf{Z}_{24}$ sunt *nilpotente* atunci $f = \hat{a}X + \hat{b}$ este *nilpotent* în inelul $(\mathbf{Z}_{24}[X], +, \cdot)$.

(2p) **f)** Să se arate că $f \in \mathbf{Z}_{24}[X]$, $f = \hat{a}X^3 + \hat{b}X^2 + \hat{c}X + \hat{d}$ este *nilpotent* dacă şi numai dacă $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$ sunt *nilpotente* în inelul $(\mathbf{Z}_{24}, +, \cdot)$.

(2p) **g)** Să se determine numărul polinoamelor de gradul 3 din inelul $\mathbf{Z}_{24}[X]$ care sunt *nilpotente*.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definite prin $f(x) = e^{x^2}$ şi $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$ şi $F'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se arate că funcția F este injectivă.

(4p) **c)** Să se arate că $e^x \ge x + 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(2p) **d)** Să se demonstreze că $F(x) > \frac{x^3}{3} + x$, $\forall x > 0$ şi $F(x) < \frac{x^3}{3} + x$, $\forall x < 0$.

(2p) **e)** Să se demonstreze că funcția F este bijectivă.

(2p) **f)** Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} n \cdot G\left(\frac{1}{n}\right)$, unde $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este inversa funcției F.

(2p) **g)** Să se arate că nu există $u, v \in \mathbf{R}[X]$, nenule, astfel încât $F(x) = \frac{u\left(e^{x^2}\right)}{v\left(e^{x^2}\right)}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.